

ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES STRUCTURES D'HELICOPTERES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

par AUDRY R.

Ingénieur à la Société Nationale Industrielle Aérospatiale

1. INTRODUCTION

Les phénomènes vibratoires sont devenus déterminants dans la conception des hélicoptères modernes, d'une part parce que le confort des passagers et de l'équipage doit aujourd'hui être une préoccupation majeure, et d'autre part parce que les déformations périodiques qu'ils entraînent, influent directement sur les durées de vie des pièces et matériels embarqués. Ce problème se ramène à l'étude du comportement d'un système élastique, constitué par la structure et la mécanique, sous les sollicitations alternées d'un système excitateur, constitué par le rotor, dont la fréquence d'excitation est directement liée au régime de rotation et au nombre de pales. La solution consistera donc à dimensionner les éléments élastiques de telle manière que les modes propres du système ne soient pas accordés sur l'excitation, ou que le point d'excitation se trouve à un noeud.

Cependant la connaissance de ces modes propres est un problème rendu très ardu par la complexité des structures, pour lesquelles les théories habituelles de la Résistance des Matériaux exigent des hypothèses et des simplifications souvent abusives. D'où la nécessité d'autres méthodes de calcul permettant de décrire plus fidèlement le comportement élastique de tels systèmes. Ces méthodes existaient sur le plan théorique depuis la fin du siècle dernier, groupées sous le vocable de Théorèmes de l'Energie de Déformation. Malheureusement l'utilisation de ces théorèmes était freinée par le fait qu'ils conduisent à la résolution de systèmes d'équations à très grand nombre d'inconnues, impossible à réaliser à l'époque.

Il fallut attendre les années 60 pour que l'apparition des ordinateurs et la formulation matricielle de ces théorèmes permettent de les utiliser de manière intensive.

2. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Lorsque la structure étudiée consiste en un assemblage d'éléments liés entre eux en un nombre fini de points, certaines techniques empruntées à l'Analyse des Réseaux permettent de décrire parfaitement le comportement élastique du système.

En prenant comme paramètres les déplacements et les efforts en ces points, l'écriture des conditions de compatibilité et d'équilibre aux extrémités conduit à une relation matricielle de la forme :

$$K V_j = S_j \quad (1)$$

$$\text{où } V_j = \{ dx_1 \ dy_1 \ dz_1 \ dx_2 \ dy_2 \ dz_2 \ \dots \ dx_n \ dy_n \ dz_n \}$$

$$\text{et } S_j = \{ Fx_1 \ Fy_1 \ Fz_1 \ Fx_2 \ Fy_2 \ Fz_2 \ \dots \ Fx_n \ Fy_n \ Fz_n \}$$

sont les composantes des déplacements et des efforts en chaque point dans un système global de coordonnées.

Cette analogie avec un réseau incite à appeler noeuds ces points de liaison.

Dans le cas d'une structure continue, le nombre de ces points de liaison devient infini et les relations deviennent des équations différentielles dont l'intégration est impossible dans la plupart des cas. La Méthode des Eléments Finis consiste alors à remplacer ces éléments réels par des éléments idéalisés à nombre de jonctions fini, dont l'état de contrainte est simulé par un ensemble de forces fictives concentrées en ces noeuds, et dont le travail sous les déplacements des noeuds (supposés être les déplacements réels de ces points) est équivalent à l'énergie de déformation des éléments réels.

La structure idéalisée constituée de ces éléments fictifs est alors étudiée suivant les mêmes techniques que précédemment.

### 2.1. Caractéristiques des éléments idéalisés

Le déplacement réel d'un point M à l'intérieur de l'élément, défini par la colonne  $u = \{u_x, u_y, u_z\}$ , peut être interpolé en fonction des déplacements des noeuds par une fonction matricielle B, telle que :

$$u = B V_j \quad (2)$$

$V_j$  étant la colonne des déplacements aux noeuds de l'élément. Les coefficients de B ne dépendant que des coordonnées de M et de celles des noeuds.

Les déplacements étant supposés petits, les déformations en M s'expriment, au premier ordre, en fonction des dérivées de u :

$$\epsilon = b V_j \quad \text{avec} \quad b = f \left( \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y}, \frac{\partial B}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Pour simplifier l'exposé nous ne tiendrons compte ni de déformations initiales, ni d'effets de température.

La contrainte au point M s'exprime alors en utilisant la loi de Hooke généralisée par :

$$\sigma = K_v \epsilon = K_v b V_j \quad (4)$$

Si nous appliquons aux noeuds un déplacement virtuel  $\delta V_j$  autour de la position d'équilibre, la variation virtuelle d'énergie sera  $\delta U = \int_v \delta \epsilon^t \sigma dv$   
 or  $\delta \epsilon = b \delta V_j$  entraîne  $\delta U = \delta V_j^t \left[ \int_v b^t K_v b dv \right] V_j$

Les forces concentrées aux noeuds de l'élément idéalisé effectuent un travail virtuel  $\delta W = \delta V_j^t S_j$ .

Le théorème du travail virtuel exprime qu'à l'équilibre, il y a égalité entre la variation d'énergie interne et le travail effectué par les forces extérieures, et ceci quel que soit le lot de déplacements virtuels choisis, donc

$$\left[ \int_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^t \mathbf{K} \mathbf{v} \mathbf{b} \, d\mathbf{v} \right] \mathbf{V}_j = \mathbf{S}_j \quad (5)$$

et par analogie avec (1)

$$\mathbf{K}_j = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^t \mathbf{K} \mathbf{b} \, d\mathbf{v} \quad (6)$$

appelée matrice de rigidité de l'élément.

## 2.2. Matrice globale de rigidité

Si les déplacements de tous les noeuds de la structure sont rangés dans un vecteur colonne  $\mathbf{r}$ , les conditions de compatibilité s'expriment simplement par le fait que le vecteur  $\mathbf{V}_j$  des déplacements aux noeuds de l'élément  $j$  peut être extrait de  $\mathbf{r}$  par une matrice booléenne telle que :

$$\mathbf{V}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{r} \quad (7)$$

Les efforts extérieurs suivant les axes étant eux aussi rassemblés dans un vecteur  $\mathbf{F}$ , nous pouvons inversement distribuer les efforts  $\mathbf{S}_j$  aux bornes de l'élément  $j$  dans un vecteur  $\mathbf{F}_j$  de même longueur que  $\mathbf{F}$  par la relation :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{a}_j^t \mathbf{S}_j \quad (8)$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent simplement

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j = \sum_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{S}_j$$

et en tenant compte de (1) et (7)

$$\mathbf{F} = \left[ \sum_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{K}_j \mathbf{a}_j \right] \mathbf{r} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} \quad (9)$$

Cette matrice  $\mathbf{K}$  représente donc l'équilibre de la structure complète ; elle est évidemment symétrique. Mais l'ensemble des efforts extérieurs devant aussi être en équilibre, cette matrice est aussi singulière.

En effet les relations d'équilibre (en général 6) du vecteur  $\mathbf{F}$  peuvent s'écrire  $\mathbf{A}\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

Ceci devant être vrai quel que soit le vecteur  $\mathbf{r}$  la relation  $\mathbf{A}\mathbf{K} = \mathbf{0}$  traduit la singularité (en général d'ordre 6) de  $\mathbf{K}$ .

### 2.3. Relations linéaires entre les déplacements

Certaines liaisons cinématiques entre les noeuds de la structure peuvent se traduire par des relations linéaires entre les degrés de liberté de la forme.

$$\sum c_i r_i = 0 \quad (10)$$

Ce sera le cas par exemple pour un appui oblique (relation entre les degrés de liberté d'un même noeud), ou pour un ensemble de n noeuds reliés par une pièce considérée comme infiniment rigide (les déplacements de n-1 noeuds s'exprimant en fonction des déplacements d'un seul).

En sélectionnant dans (10) un degré j et ceci dans chacune de ces relations, on définit un vecteur des degrés éliminés :

$$r_j = \beta r_i \quad r_i \text{ désignant l'ensemble des degrés restant.}$$

(9) peut alors s'écrire (en notant I une matrice unité de même ordre que  $r_i$ )

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \beta \end{bmatrix} r_i = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \quad (11)$$

L'application du théorème des travaux virtuels à cette équation s'écrit :

$$\delta r_i^t \left| \begin{array}{c} I \\ \beta^t \end{array} \right| \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c} I \\ \beta \end{array} \right| r_i = \delta r_i^t \left| \begin{array}{c} I \\ \beta^t \end{array} \right| \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \quad (12)$$

Les produits effectués permettent de voir qu'en fonction des seuls déplacements  $r_i$  nous pouvons utiliser une matrice de rigidité et un vecteur second membre, respectivement égaux à :

$$K_L = K_{ii} + K_{ij} \beta + \beta^t K_{ji} + \beta^t K_{jj} \beta \quad (13)$$

$$F_L = F_i + \beta^t F_j \quad (14)$$

### 2.4. Analyse statique

Elle consiste à résoudre le système d'équation (9). K étant singulière, cela n'est possible qu'en tenant compte des conditions aux limites (e.g. appuis statiques). En permutant lignes et colonnes dans (9) nous pouvons grouper en bout de colonne tous les degrés de libertés dont la valeur est fixée par ces conditions :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Si ces conditions sont  $r_2 = d$  la résolution s'écrit :

$$r_1 = K_{11}^{-1} (F_1 - K_{12} d) \quad (16)$$

et les réactions aux appuis sont données par la deuxième équation :

$$F_2 = K_{21} r_1 + K_{22} d \quad (17)$$

En utilisant (4) et (7) nous pouvons alors calculer les contraintes dans chaque élément :  $\sigma = K_v b_{aj} r$ .

## 2.5. Calcul des modes propres

Le second membre de l'équation (9) est alors constitué par les forces d'inertie. La déformée étant de la forme  $q = r e^{i\omega t}$  cette équation devient :

$$(K - \omega^2 M) q = 0 \quad (18)$$

M, dite matrice de masse, peut être obtenue de la même façon que K, en intégrant dans chaque élément les forces de volume. Cependant, pour une structure aéronautique, et plus spécialement pour un hélicoptère, la masse des éléments résistants est faible devant la masse des ensembles mécaniques et des équipements.

Aussi suffit-il de considérer des masses ponctuelles regroupées aux noeuds, en faisant intervenir si nécessaire les inerties massiques vis à vis des degrés de liberté de rotation.

M est alors diagonale, et peut donc être manipulée très facilement.

L'équation (18) peut s'écrire :

$$(M^{-1} K - \omega^2 I) q = 0 \quad (19)$$

forme canonique d'un système aux vecteurs propres.

Ce système peut facilement être symétrisé en faisant le changement de variables  $X = M^{\frac{1}{2}} q$ , qui conduit à :

$$(M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} - \omega^2 I) X = 0 \quad (20)$$

## 2.6. Condensation du système

Les processus utilisables de recherche des éléments propres d'une matrice étant itératifs, il n'est pas raisonnable de résoudre le système (20) pour des ordres dépassant quelques centaines.

Cependant la description par éléments finis de la structure complète conduit à des systèmes d'ordres beaucoup plus élevés. On est alors conduit à regrouper les masses sur certains noeuds (e.g. les points où sont situés les masses les plus importantes).

La colonne des déplacements  $q$  peut alors être scindée en degrés de masse et degrés sans masse, et le système s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{cc|c|c} K_{mm} & K_{mo} & M & 0 \\ K_{om} & K_{oo} & 0 & 0 \end{array} \right] - \omega^2 \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} q_m \\ q_o \end{array} = 0$$

En éliminant les degrés  $q_o$  on est conduit à :

$$(K_c - \omega^2 M) q_m = 0$$

avec 
$$K_c = K_{mm} - K_{mo} K_{oo}^{-1} K_{om} \quad (21)$$

$$q_o = - K_{oo}^{-1} K_{om} q_m$$

### 3. PROGRAMMES DE CALCUL

La Méthode des Eléments Finis, telle qu'elle a été exposée ci-dessus, a été programmée à la Division Hélicoptères de l'AEROSPATIALE. Deux programmes ont été développés, pour l'étude du statique et du dynamique, qui, dans la description de la structure, admettent tous deux le même jeu de données.

Ils disposent d'une bibliothèque comprenant des éléments

- longitudinaux travaillant en traction-compression
- plans travaillant en membrane
- longitudinaux capables de flexion
- plans capables de flexion
- volumiques

Tous deux sont capables de liaisons cinématiques entre les éléments par l'intermédiaire de relations linéaires.

#### 3.1. Programme statique S01

La méthode utilisée pour la résolution est l'algorithme de Cholesky. L'ordre des systèmes à traiter et le nombre de cas de calcul ne sont pas limités, le programme découpant la matrice en fonction de la place disponible en mémoire centrale. En fait la véritable limitation porte sur le temps de calcul, qui se trouve notablement augmenté par l'opération de découpage. Afin de diminuer l'occupation mémoire de la matrice, un sous-programme génère une numérotation interne des noeuds, transparente pour l'utilisateur, qui permet dans certains cas des gains de temps de l'ordre de 1 à 5.

Les cas de calcul peuvent être constitués d'efforts appliqués aux noeuds, de charges réparties sur les éléments, de contraintes thermiques, de déplacements imposés aux noeuds, ou de toute combinaison de ces chargements.

### 3.2. Programme dynamique S02

Théoriquement illimité lui aussi dans sa capacité de traitement, il se trouve lui aussi limité en pratique par le temps de calcul, l'opération la plus longue étant la condensation de la matrice de rigidité. Cette phase est effectuée par étapes successives, chaque pas de calcul traitant le nombre maximum de lignes compatible avec la zone mémoire disponible.

La recherche des éléments propres de la matrice finale peut se faire par trois méthodes différentes, dont la plus performante consiste en une tridiagonalisation de Householder suivie d'un algorithme QR. Les vecteurs propres résultant alors de l'application des transposées des matrices de transformation.

Cette manière de faire est insensible à l'ordre de multiplicité des valeurs propres, et en particulier à la présence de modes de déplacement en corps rigide. Le calcul de ceux-ci permet d'ailleurs de vérifier que la condensation n'a pas trop dénaturé par son imprécision le problème étudié. On ne doit en effet y déceler aucune déformation.

### 4. EXEMPLE DE CALCUL

Le calcul des modes propres de l'hélicoptère SA 341 "Gazelle" a été effectué par les programmes décrits ci-dessus.



Fig. 1

Le modèle, décomposé en 10 sous-structures afin de faciliter l'idéalisation, comportait 354 noeuds reliés par 836 éléments, représentant un modèle de 1598 degrés de libertés. Ce modèle est visualisé sur la figure 2.

Les idéalizations de certaines sous-structures ont pu être contrôlées par comparaison des flèches calculées par le programme statique avec celles mesurées en essai.

Les masses ont été regroupées en 45 noeuds, donnant une matrice dynamique d'ordre 133, dont on a calculé 20 modes élastiques à basse fréquence. Trois de ces modes sont représentés sur la figure 3. Le fondamental de l'excitation étant à 19 Hz ( $3\Omega$ ), on voit sur cette figure que les modes 3 et 9 sont près de la résonance.

Cependant le centre rotor est quasiment sur noeud du mode 8 et celui-ci répond peu. Par contre le déplacement en Z important du point d'excitation sur le mode 9 montre que ce dernier participera beaucoup à la réponse globale. Si la participation de la cabine est assez faible (le mode présente 2 noeuds à cet endroit), le déplacement vertical du plancher réservoir est important, ce qui explique le fort niveau vibratoire rencontré en vol sur cet élément.

#### REFERENCES

- 1 Przemieniecki : Theory of Matrix Structural Analysis. Mc Graw Hill (1968)
- 2 Zienkiewicz : The Finite Element Method 2nd Edn. Mc Graw Hill (1971)
- 3 I. Holand and K. Bell : Finite Element Methods in Stress Analysis Tapir (1969)
- 4 R.J. Guyan : Reduction of Stiffness and Mass Matrices, J. Am. Inst. Aeron. Astron. 3,380 (1965)
- 5 J.H. Wilkinson : The Algebraic Eigenvalue Problem Clarendon Press (1965)

IDEALISATION DU SA 341

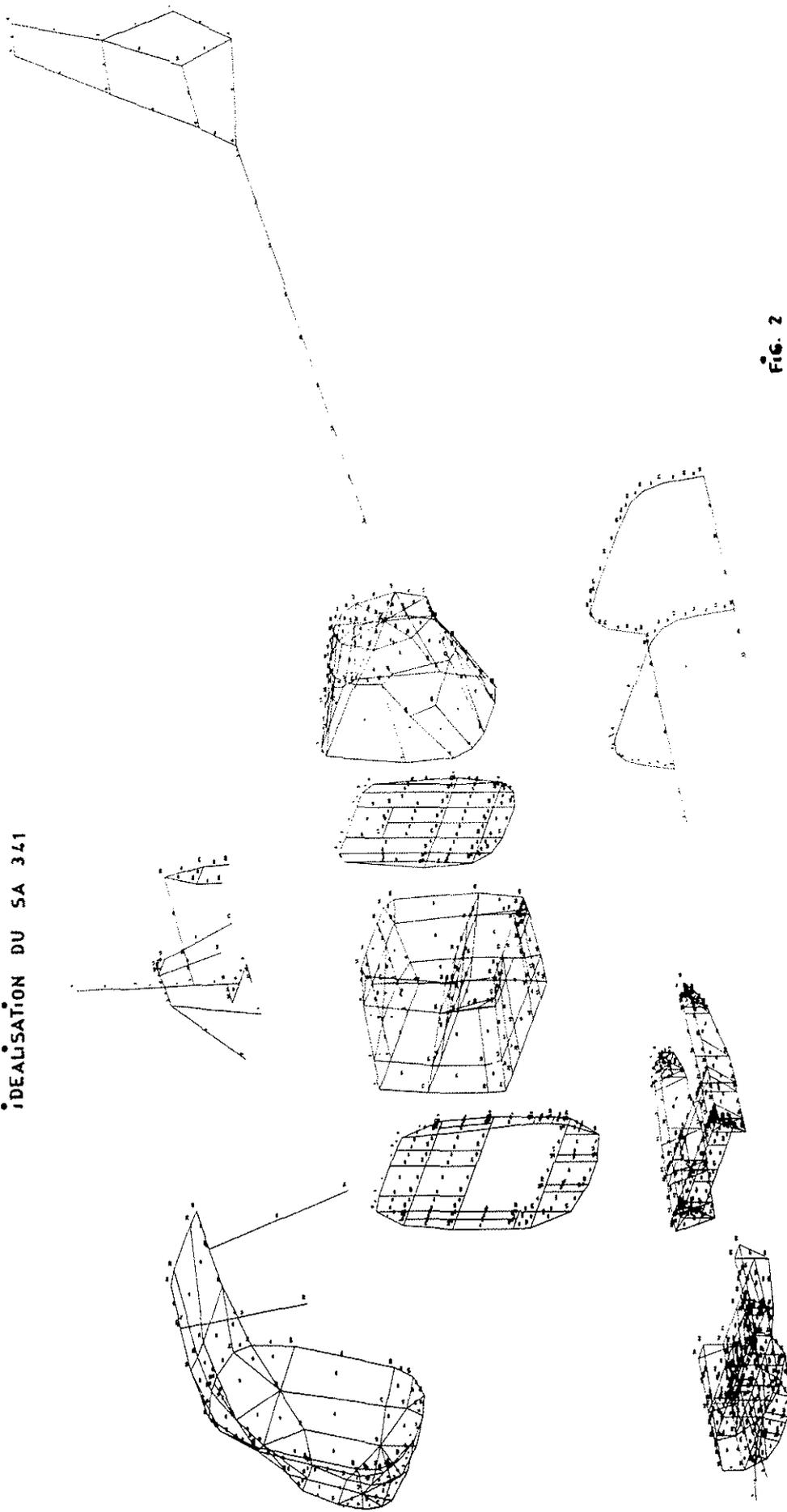


FIG. 2

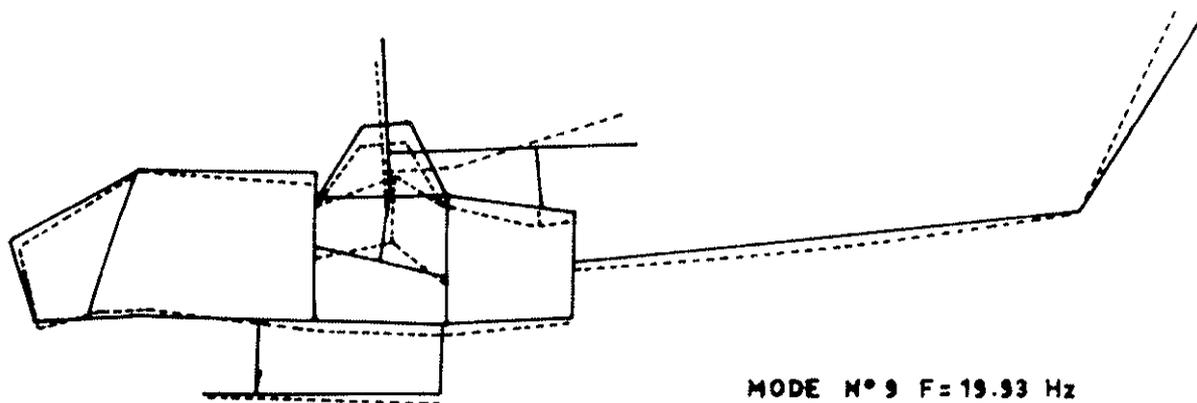
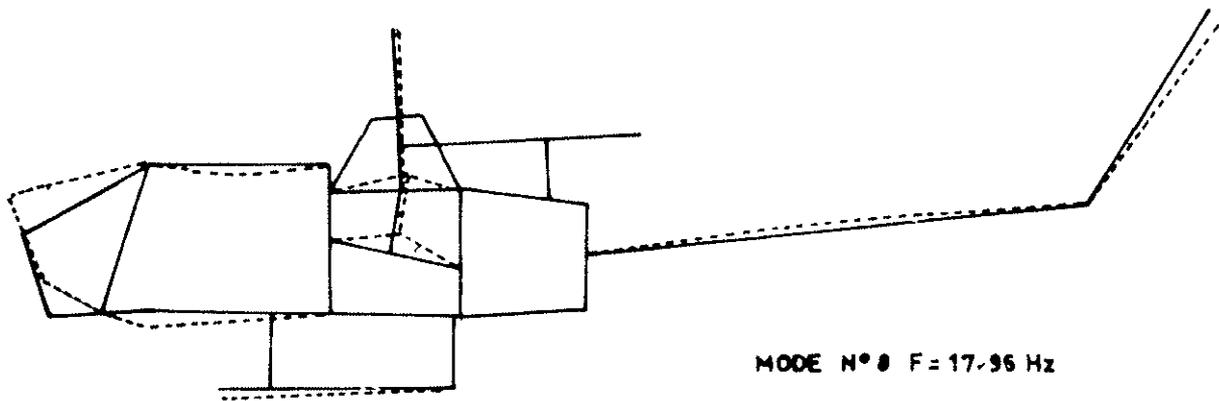
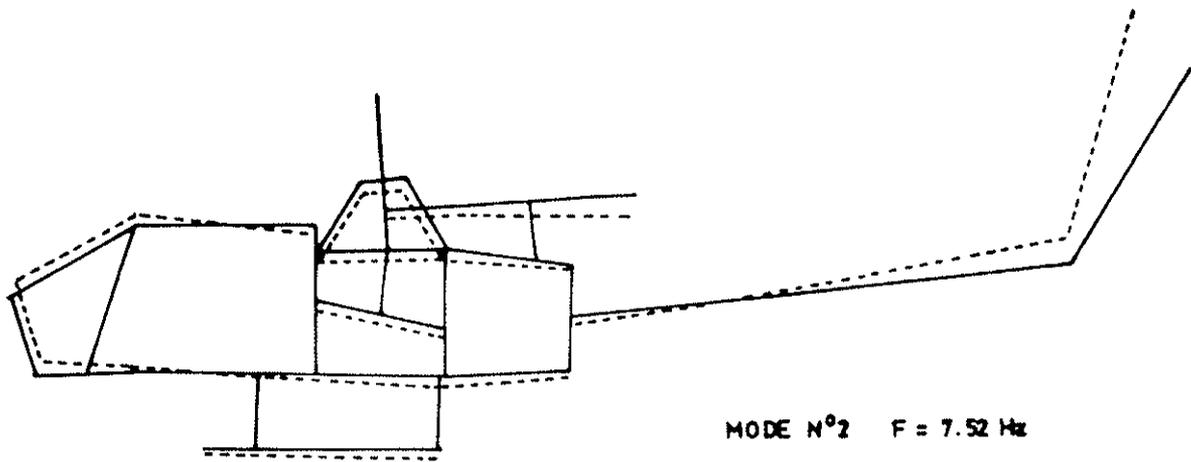


Fig. 3